AULA DO DIA 07/06/2015 - VERÃO

<u>Teorema 4</u>: Sejam V espaço vetorial real e U, W subespaços de V. Então, o subconjunto de V definido por:

$$U \cap W = \{ v \in V : v \in U \text{ e } v \in W \}$$

é subespaço vetorial de V.

<u>Dem</u>: feito em sala de aula.

<u>Corolário 1</u>: Seja V um espaço vetorial real. Então, a interseção de uma coleção arbitrária de subespaços de V é um subespaço vetorial de V.

<u>Dem</u>: Exercício.

<u>Teorema 5</u>: Sejam V um espaço vetorial real, U e W subespaços vetoriais de V. Então, o subconjunto de V definido por:

$$U + W = \{ v \in V : v = u + w \text{ com } u \in U \text{ e } w \in W \}$$

é subespaço vetorial de V.

<u>Dem</u>: Como $0_V \in U$ e $0_V \in W$, então $0_V \in U + W$, com isso $U + W \neq \emptyset$. Sejam $v_1, v_2 \in U + W$, então

existem $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ tais que $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$. Então,

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2)$$
$$= \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U + W$, então existe $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$, logo,

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot (u + w) = \underbrace{\lambda \cdot u}_{\in U} + \underbrace{\lambda \cdot w}_{\in W} \in U + W.$$

<u>Definição 6</u>: Sejam V um espaço vetorial real, U, W subespaços vetoriais de V tais que $U \cap W = \{0_V\}$. Dizemos que $U + W$ é uma <u>soma direta</u> dos subespaços U e W, e denotamos por $U \oplus W$.

<u>Exemplo</u>:

① $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z = 0\}$
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y = 0\}$

$U = [(1,0,0), (0,1,0)]$
$W = [(1,0,0), (0,0,1)]$

Então $\mathbb{R}^3 = U + W$.

porém a soma não é direta.

(2) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

$U = [(1,0)]$ $\quad W = [(0,1)]$

$U + W = [(1,0) ; (0,1)]$

$U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\quad$ Logo $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$

(3) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}$

$U = [(1,1)]$ $\quad W = [(1,-2)]$

Logo $U + W = [(1,1) ; (1,-2)]$

$U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

<u>Definição 7</u>: Sejam V um espaço vetorial real, U e W subespaços vetoriais de V. Dizemos que o espaço vetorial V é soma direta dos subespaços U e W, e denotamos por $V = U \oplus W$, se

1. $U \cap W = \{0_V\}$
2. $V = U + W$.

<u>Proposição 1</u>: Sejam U e V subespaços vetoriais do e.v. V. Então, $V = U \oplus W$ se, e somente se, cada elemento $v \in V$ possui uma única decomposição $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.

<u>Demonstração</u>: ($\Rightarrow$) suponha que $V = U \oplus W$, então temos a existência da decomposição, basta mostrar a unicidade. Para isso, suponha que $v \in U \oplus W$, então $\exists\, u \in U$, $w \in W$ tais que $v = u + w$.

Se existirem $u_1 \in U$, $w_1 \in W$ tais que $v = u_1 + w_1$, então teríamos $u + w = u_1 + w_1 \Leftrightarrow$

$$U \ni u - u_1 = w_1 - w \in W$$

$w_1 - w \in U \cap W = \{0_V\} \Rightarrow w_1 - w = 0_V \Rightarrow$
$w_1 = w$.

Com mesmo argumento $u = u_1$, então a decomposição é única.

($\Leftarrow$) Seja $v \in V$, por hipótese, $\exists!\, u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Mostraremos que $V = U \oplus W$. Suponha que $v \in U \cap W$, logo $v \in U$ e $v \in W$. Dessa forma:

$$v = u + w = (u + v) + (w - v)$$

mas a decomposição é única, então

$$u = u + v \quad \text{e} \quad w = w - v \quad \text{, ou seja}$$

$v = 0_V$. Com isso $U \cap W = \{0_V\}$, e provamos que $V = U \oplus W$.

<u>Exemplos</u>:

① $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = x\} = U$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = -x\} = W$

Todo elemento $v \in \mathbb{R}^2$ é escrito de modo único como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$, isto é, $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

$U = [(1,1)]$ $W = [(1,-1)]$ $U + W = [(1,1);(1,-1)]$

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer.

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,-1)$$

$$a = \frac{x+y}{2} \qquad b = \frac{x-y}{2}$$

Logo a, b é obtida de forma única em função das componentes de (x,y).

(*) Aqui termina o conteúdo da 2ª lista.

AULA DO DIA 08/01/2016

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 8: Sejam V um espaço vetorial real e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, toda combinação linear nula

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definição 9: Sejam V um espaço vetorial real e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é linearmente dependente (L.D.) se, é possível uma combinação linear nula

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

sem que os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sejam todos nulos.

Uma outra maneira (equivalente) para definir dependência e independência linear é a seguinte:

<u>Definição 10</u>: Seja V um espaço vetorial real. Um subconjunto S de V é dito <u>linearmente dependente</u> (L.D.), se existirem elementos distintos $v_1, \ldots, v_n$ em S e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Um conjunto que não é linearmente dependente é <u>linearmente independente</u>.

<u>Observações</u>: (V é espaço vetorial real)

(1)- Todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é linearmente dependente.

<u>Solução</u>: Seja $S = \{0_V, v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ e considere os escalares $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Logo:

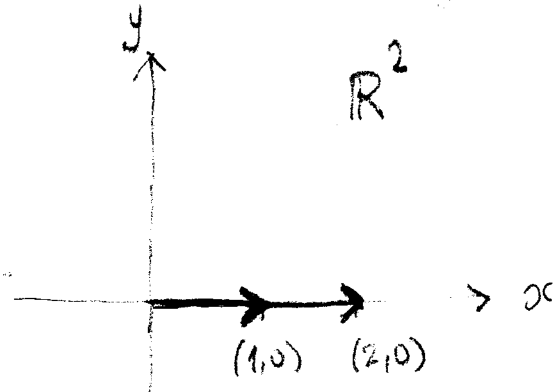
$$\alpha_0 0_V + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 1 \cdot 0_V + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n =$$
$$= 0_V + 0_V + \cdots + 0_V = 0_V$$

Então pela definição 10, S é linearmente dependente.

② Não é verdade que subconjuntos de conjuntos linearmente dependentes são também linearmente dependentes.

<u>Solução</u>: Vejamos o contra-exemplo em $\mathbb{R}^2$:

O conjunto $S=\{(1,0);(2,0)\}$ é LD, porém, o subconjunto de S, $S_1=\{(1,0)\}$ é LI.



③ Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

<u>Solução</u>: Suponha que $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ seja linearmente independente. Considere $S_1=\{v_1,\dots,v_k\}\subset S$ para algum $k\in\mathbb{N}$, com $k<n$. Sejam $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k=0_V$.

Então:

$$(*) \quad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_K v_K + 0 \cdot v_{K+1} + 0 \cdot v_{K+2} + \cdots + 0 v_n = 0_V$$

A equação acima$^{(*)}$ é uma combinação linear nula dos elementos de S. Como S é LI, então todos os escalares devem ser iguais a zero, ou seja,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = 0.$$

Por isso que $S_1 = \{v_1, \ldots, v_K\}$ é um conjunto LI.

(4) Durante o curso, usaremos a convenção de que o conjunto $\phi \subset V$ é linearmente independente.

Teorema 6: Sejam V um espaço vetorial real e $v_1, \ldots, v_n \in V$. O conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ é linearmente dependente se, e somente se, um de seus elementos for uma combinação linear dos outros.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Supondo que $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LD. Da definição 10, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$.

Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Logo,

$$\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \frac{1}{\alpha_1} \cdot 0_V = 0_V$$

$$\|$$

$$\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 v_1) + \cdots + \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_n v_n)$$

$$\|$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\alpha_1\right) v_1 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha_1}\alpha_n\right) v_n$$

$$\|$$

$$v_1 + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n$$

Logo $v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n$

Então v_1 é uma combinação linear de $\{v_2, \ldots, v_n\}$.

($\Leftarrow$) É exercício para casa.

Exemplos:

1. $S = \{(1,1,0)\ ;\ (1,4,5)\ ;\ (3,6,5)\}$

   ? S é LI ou LD em $\mathbb{R}^3$?

23

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (1,4,5) + \alpha_3 (3,6,5) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3, \ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3, 5\alpha_2 + 5\alpha_3) = (0,0,0)$$

Então:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Montando a matriz aumentada:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 := L_2 - L_1} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 := \frac{1}{5} L_3]{L_2 := \frac{1}{3} L_2}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 := L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$

$$\alpha_1 - \alpha_3 + 3\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 = -2\alpha_3$$

Portanto $\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ qualquer} \end{cases}$

Com isso, por exemplo, quando

$\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = -1$. Logo pelo teorema 6, S é linearmente dependente.

② $S = \{(1,2,3); (1,4,9); (1,8,27)\}$ é LI em $\mathbb{R}^3$.

Definição 11: Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([a,b])$. Dizemos que o conjunto de funções $S = \{f_1(x); \dots, f_n(x)\} \subset \mathcal{C}([a,b])$ é linearmente dependente, se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

O conjunto S é linearmente independente se não for linearmente dependente.

Exemplo:

① $S = \{1, \cos(x), \cos(2x)\}$ é LI em $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$.

Solução: Considere a combinação linear

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos(x) + \alpha_3 \cdot \cos(2x) = 0 \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

Como a equação é válida $\forall x \in [-\pi, \pi]$, **25**

em particular para $x = -\pi$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$,

ou seja

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos(-\pi) + \alpha_3 \cos(-2\pi) = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos(0) + \alpha_3 \cos(2 \cdot 0) = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \quad - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo da Definição 11,

S é linearmente independente.

(2) $S = \{1, x, x^2, 2 - 3x + 2x^2\}$ é L.D!

$$p_4(x) = 2p_1(x) - 3p_2(x) + 2p_3(x)$$

(3) $S = \{\cos^2(x), \operatorname{sen}^2(x), 1\}$ é LD!

$\mathcal{C}^1([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ ; \ f$ é diferenciável$\}$

Com a mesma estrutura de soma e multiplicação por escalar que de $\mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{C}^1([a,b])$ se torna um espaço vetorial real.

Teorema 7: Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}^1([a,b])$ e as funções $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. O conjunto $S = \{f(x), g(x)\}$ é linearmente dependente se, e somente se,

$\det(A(x)) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$, onde

$$A(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

O determinante da matriz A é denominado wronskiano das funções f e g, que vamos denotar por $W(f,g)(x)$.

Dem: Exercício para casa.

Exemplo

① $S = \{e^x, x e^x\}$ são LI $\forall\, x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$

② $S = \{\operatorname{sen} x, x \cdot \operatorname{sen} x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^2([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f' \text{ é diferenciável} \}$

<u>Teorema 8</u>: Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}^2([a,b])$ e as funções $f, g, h \in \mathcal{C}^2([a,b])$. O conjunto $S = \{f(x), g(x), h(x)\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $W(f,g,h)(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$, onde o wronskiano é dado por:

$$W(f,g,h)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix} \quad \forall x \in [a,b]$$

<u>Dem</u>: Exercício para casa.

<u>Exemplo</u>:

1. $S = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é l.i $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$

2. $S = \{\operatorname{sen} x, \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\}$ é l.d. $\forall x \in \mathbb{R}$